

# 二価ヒステリシス曲線の定式化

三 浦 隆 俊\*

## A Formulation of Double Value Hysteresis Curve

by Takatoshi Miura\*

**Synopsis:** A new algorithm is given for the effective convergence coefficient sequence  $a_k[j]$  of the orthogonal polynomials which is the modeler of double value hysteresis element generated by an input  $x = \cos \omega t$ .

The new algorithms is depending the iteration method which to be convenient for the computer running.

**要旨** 正弦波入力  $x = \cos \omega t$  から得られる二価ヒステリシス曲線の定式化をチェビシェフの直交多項式を使い、その係数の算出法として、収束係数列  $a_k[j]$  の作り方を提唱している。この算定法は反復計算法であって、電子計算機で処理するのに便利である。

### 1. ま え が き

ヒステリシス非線形素子の入出力特性曲線、またわ、ヒステリシス曲線を方程式で表現しようとする試みは予想以上に古くから行われ、現象論的にす高度の定式化の研究がなされている。<sup>5)6)</sup>

本文はこのような現状において、素人的立場から、正弦波入力で駆動される二価ヒステリシス曲線を直交多項式を使って、定式化を行なったものである。

定式化の目的は制御系にヒステリシスが存在した場合その動特性の振舞に特記すべきものが存在するか、否かを検討する為の、簡便なモデル式を必要としていた事情にあった。

ここでは簡便化を目的として、多様なヒステリシスに対し、二条件を満たすものに限定した。独立変数  $x$  に特別の条件を与えること、つまり  $x = \cos \omega t$  として、独立変数の増減の変化点、いいかえれば、反点を  $x = \pm 1$  と限定することにより、無限価のヒステリシスを二価ヒステリシス曲線に限定した。二価性の性質は、第二種チェビシェフ関数  $U_n(x)$  により満たされるので、数学モデルとして、チェビシェフの直交多項式を採用した。

この多項式の係数算定法として新に、反復計算法を述べた理由は、通常の直交積分は、この種の問題に対し、十内な計算精度を与えられるか、否か、疑問が残っている為である。

### 2. チェビシェフの直交多項式

第一種チェビシェフ関数  $T_n(x)$ 、及び第二種チェビシェフ関数  $U_n(x)$  を独立変数  $x$  にとり、 $n$  をそれぞれ 1, 2, ..., 6 に対し図示すると、単なる 1 対  $n$  のリサーチ図形となる。これらの関数形を Table 1 に、また図形を Fig.1 に示す。

じっさい、X-Y レコーダ、あるいは、オシロスコープのブラウン管面上で、水平軸 (X 軸) に入力波  $X = \cos \omega t$ 、垂直軸 (Y 軸) に入力波  $Y = \cos(n\omega t)$  の像は 1 対  $n$ 、同相のリサーチ図形  $T_n(x)$  を示す。同様に  $X = \cos \omega t$ 、 $Y = \sin(n\omega t)$  は 1 対  $n$ 、相差 90° のリサーチ図形  $U_n(x)$  を示し、独立変数  $x$ 、 $|x| \leq 1$  の二価関数となる。したがって、 $T_n(x)$  と  $U_n(x)$  し線形結合は同様にリサーチ図形となる。

このような、 $T_n(x)$  と  $U_n(x)$  の重ね合せによって、二価ヒステリシス曲線を表現できるものであろうか。この疑問に対する対する答は、次の順序を必要とする。

古くから、電気技術は正弦波入力で駆動されるヒステリシス現象をフーリエ級数で展開し、出力  $y(t)$  を定式化していたことに注目すればよい。

この答は出力  $y$  を入力  $x$  で、 $y = y(x)$  と表現できればよいことになる。

すなわち、

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)) \quad (2-1)$$

ここで、

\* 電気工学科助教

Assistant Professor, Electrical Engineering Division.

Table 1. Chebyshev 関数表

$n$	第1種 Chebyshev 関数 $T_n(x)$	第2種 Chebyshev 関数 $U_n(x)$
0	1	0
1	$x$	$-\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
2	$2x^2-1$	$-2x\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
3	$4x^3-3x$	$-(4x^2-1)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
4	$8x^4-8x^2+1$	$-(8x^3-4x)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$-(16x^4-12x^2+1)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$-(32x^5-32x^3+6x)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$-(64x^6-80x^4+24x^2-1)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
8	$128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$	$-(128x^7-192x^5+80x^3-8x)\sqrt{1-x^2} \operatorname{sgn}(\dot{x})$
$m+1$	$T_{m+1}(x)=2xT_m(x)-T_{m-1}(x)$	$U_{m+1}(x)=2xU_m(x)-U_{m-1}(x)$
但し, $\operatorname{sgn}(\dot{x})=\begin{cases} 1 & \text{for } \dot{x}=\frac{dx}{dt}>0 \\ -1 & \text{for } \dot{x}=\frac{dx}{dt}<0 \end{cases}$		

$$x=\cos \theta=\cos \omega t$$

とおけば, チェビシェフ関数の定義式から

$$T_n(x)=\cos (n \theta)=\cos (n \cdot \cos ^{-1} x)$$

$$U_n(x)=\sin (n \theta)=\sin (n \cdot \cos ^{-1} x)$$

であるから, (2-1) 式に  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$  を代入し,

$$x(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n T_n(x)+\beta_n U_n(x)\right) \quad (2-2)$$

よって,  $y(t)$  を  $y(x)$  で表現でき, 二価ヒステリシス曲線はチェビシェフの直交多項式で表示できる。条件は,  $y$  が二乗可積分, かつ, 周期関数となる。

したがって, 二価ヒステリシス曲線は次の多項式で最良近似かつ最小二乗法近似される。

$$f_n(x)=\frac{\alpha_0}{2} T_0(x)+\sum_{k=1}^n\left(\alpha_k T_k(x)+\beta_k U_k(x)\right) \quad (2-3)$$

但し,  $T_0(x)=1$

また, 近似度の尺度として次の評価式 (2-4) を与えて実用上の目安とする。

$$J(n)=\frac{\oint\left(f_n(x)-y\right)^2 d x}{\oint y^2 d x} \quad (2-4)$$

ここで, 入力信号が次の (2-5) 式の形であっても, 単位信号として取扱える。したがって本文の単位信号は一般化された表現とみて, さしつかえない。しかし, 定式化後の  $x$  の取扱は, あくまでも,  $x=\cos \omega t$  である。

いま定式化にデータを必要とするとき, 二価ヒステリシス曲線を得るのに (2-5) 式の入力信号を与えたとしよう。

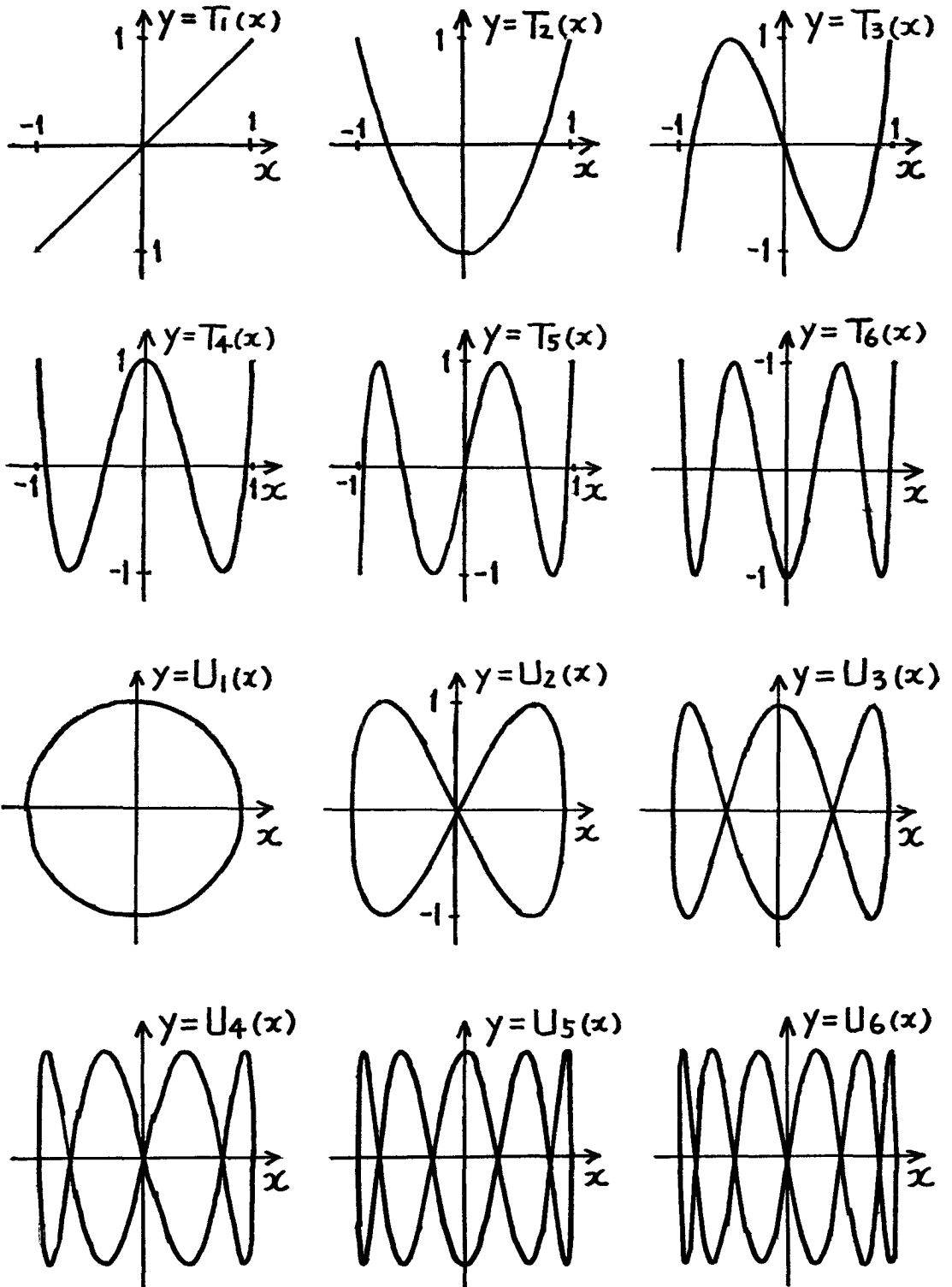
$$x=a+b \cos \omega t \quad (a, b: \text { 任意定数 }) \quad (2-5)$$

であっても, 変数変換により

$$x'=\frac{x-a}{b}$$

とおき, 改めて,  $x'$  を  $x$  とおけば, 単位正弦波とみなせる。

正に, チェビシェフの多項式  $f_n(x)$ , (2-3) 式から,  $T_n(x)$ , 及び  $U_n(x)$  を消去し,  $x$  の陽関数表示を試み

Fig. 1 Chebyshev's Function's Figures  $y=U_n(x)$ ,  $y=T_n(x)$ ,  $|x| \leq 1$

る。この形を  $g_n(x)$  とすれば、

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k \pm \sqrt{1-x^2} \left( \sum_{l=1}^n B_l x^{l-1} \right) \quad (2-6)$$

但し,  $x = \cos \omega t$

符号  $+$  は  $x$  が減少中,  $-$  は増加中とする。

$A_k, B_l$ : 定数

チェビシェフ関数の定義式, Table 1 から定数  $A_k, B_l$  は一意的に定まる。この関係を  $n=8$  までについて (2-7), (2-8) 式に示す。

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -20 & 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -48 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -12 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -32 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

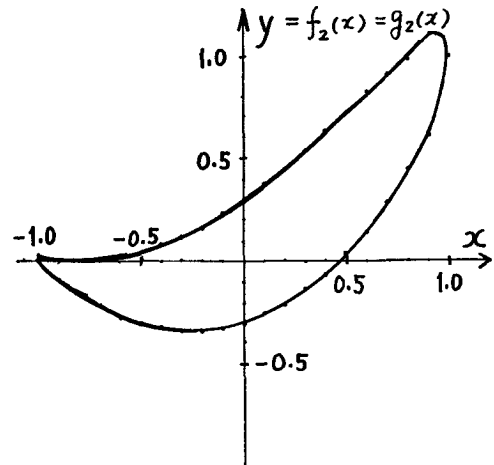
例として, チェビシェフの直交多項式で表示された二価ヒステリシス曲線の図を Fig. 2-1, 2-2, 2-3 を示す。いずれも  $x = \cos \omega t$  とする。

方程式表現  $f_n(x)$ , (2-3) 式及び  $g_n(x)$ , (2-6) 式は一般化された独立変数  $x = \cos \omega t$  から得られたものであり, これを直ちに,  $|x| \leq 1$  を満たす, 任意の  $x$  の変化に対してはめることは出来ない。二価ヒステリシスの反点の存在は  $x = \pm 1$  の二点に限定されている為である。簡単な構造から来る, 短所である。この性質を理解した上で得られて関数形  $f_n(x), g_n(x)$  を, 他の入力波形に対し, 拡張を試みるならば, 次のようになる。

二価ヒステリシスが独立変数  $x$  の変化の速さに無関係で, 単に  $x$  と, その増減中あるいわ, 減少中によって, 再現性が保証されると仮定するならば, 反点を  $x = \pm 1$  に持つ関数  $w(t)$  が次の i), ii) を満たせば,  $x = w(t)$  として拡張使用できる。

i) 反点は  $x = \pm 1$  にのみあって,  $|w| \leq 1$ 。

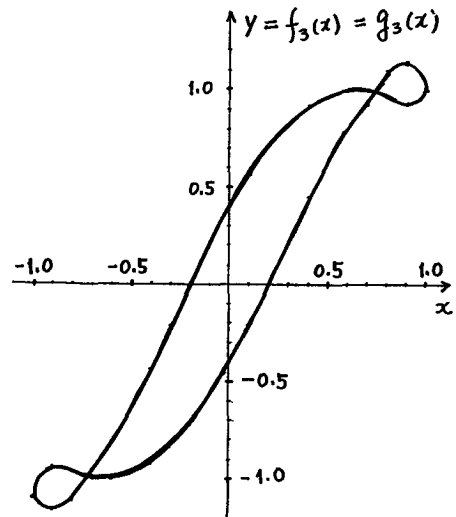
ii)  $-1 < w < 1$  に反点はなく, かつこの閉区間で, 狭



$$y = f_2(x) = 0.25 + 0.5 T_1(x) + 0.25 T_2(x) + 0.3 U_1(x) + 0.1 U_2(x)$$

$$y = g_2(x) = 0.5 (x + x^2) \pm \sqrt{1-x^2} \times (0.3 + 0.2 x)$$

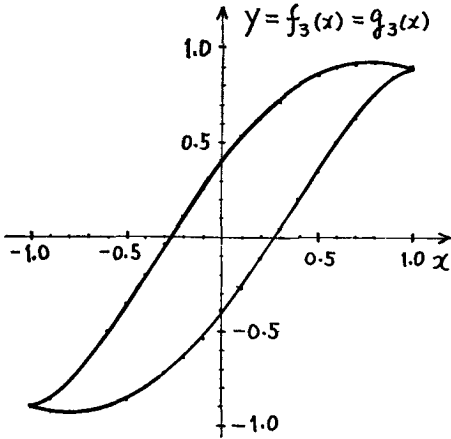
Fig. 2-1 非対称ヒステリシス曲線



$$y = f_3(x) = 1.2 T_1(x) - 0.2 T_3(x) + 0.1 U_1(x) - 0.2 U_3(x)$$

$$g_3(x) = 1.8 x - 0.8 x^3 \pm \sqrt{1-x^2} (0.4 - 0.8 x^2)$$

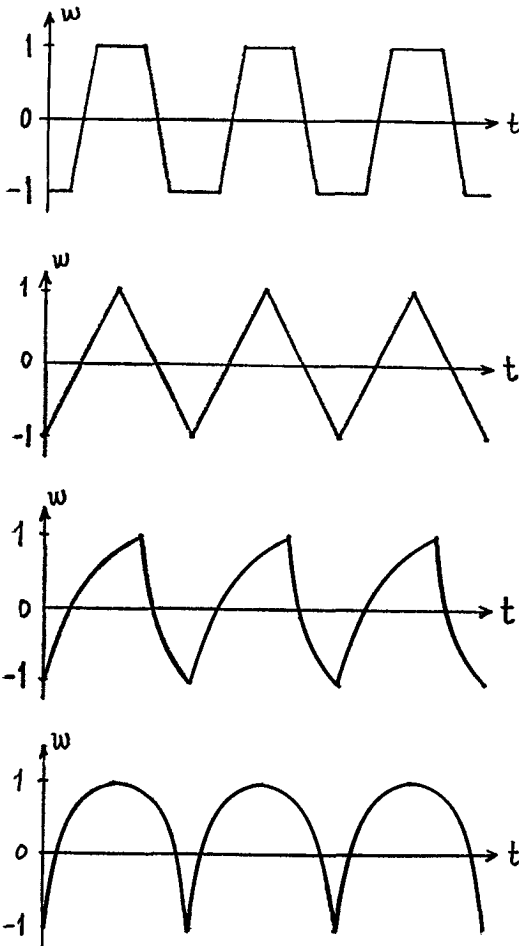
Fig. 2-2 対称ヒステリシス曲線



$$y = f_3(x) = T_1(x) - 0.1T_3(x) + 0.3U_1(x) - 0.1U_3(x)$$

$$y = g_3(x) = 1.3x - 0.4x^3 \pm \sqrt{1-x^2}(0.4 - 0.4x^2)$$

Fig. 2-3 原点对称ヒステリシス曲線

Fig. 3  $x = w(t)$  の例

義単調増加関数か、狭義単調減少関数である。

このような  $w(t)$  の例を Fig. 3 に示す。

以上のことから、本文で扱う二価ヒステリシス曲線とチェビシェフの直交多項式の関係はハッキリした。

### 3. 問題の提起

入力を単位正弦波として得られたヒステリシス曲線の定式化をチェビシェフの多項式により行ない、この係数を反復計算法によって求めることを問題の提起とする。

チェビシェフの直交多項式による数学モデル式を  $f_n(x)$  とし、(3-1) 式のように定める。

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} T_0(x) + \sum_{k=1}^n (a_k T_k(x) + a_{k+n} U_k(x)) \quad (3-1)$$

但し、

$$x = \cos \omega t$$

$T_k(x)$ :  $k$  次の第一種チェビシェフ関数

$U_k(x)$ :  $k$  次の第二種チェビシェフ関数

$a_k$ : 算定すべき定数

$$(k=0, 1, \dots, n, n+1, \dots, n+n)$$

$f_n(x)$ : 入力  $x$  に対するモデル式の出力

定式化の問題はモデル式の形が (3-1) 式のように定まると、あとは係数  $a_k$  を  $(2n+1)$  個算定することに帰着する。

利用できるデータとしては二価ヒステリシス曲線上からサンプルされた  $\{x_i, y_i\}$  が、指定されたモデルの次数に対し、十分に与えられているものと仮定する。

実際に、これらの未知定数  $a_k$  を算定する基本式は次の直交積分である。

$$a_k = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \oint y \frac{T_k(x)}{U_1(x)} dx & \text{for } k=0, 1, \dots, n \\ -\frac{1}{\pi} \oint y \frac{U_k(x)}{U_1(x)} dx & \text{for } k=n+1, n+2, \dots, n+n \end{cases} \quad (3-2)$$

この式を独立変数  $x$  の区間で定積分すると、 $T_k(x)$  は一価関数、 $U_k(x)$  は二価関数で、 $x$  の増加中と減少中で符号が異なることに注意すれば、(3-3) 式のようになる。

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 y \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{for } k=0, 1, \dots, n \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 y \frac{U_{k-n}(x)}{U_1(x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_1^{-1} y \frac{U_{k-n}(x)}{U_1(x)} dx & \text{for } k=n+1, n+2, \dots, n+n \end{cases} \quad (3-3)$$

実際に計算を行なう場合、この定積分に台形近似公式を使い、データ  $\{x_i, y_i\}$  を  $x, y$  に代入し、処理することである。<sup>2)</sup> この数値処理により、一応係数  $a_k$  は定ま

るが、データ  $\{x_i, y_i\}$  の  $x_i$  は等区間割りによるサンプルデータに対しては、時間領域における不平等サンプルに相等するし、さらに、 $T_k(x)$  の係数  $a_k$  の算定式に含まれる荷重関数が  $x=\pm 1$  に対し、無限大に増大することに注意すれば、(3-3) の形で  $a_k$  を定めることが、一番良いかどうか疑問を残す。<sup>1)</sup>

そこで、検討したのが、次の反復計算法であり、上記の疑問点を解消している。

#### 4. 反復計算法

高速数値処理をする電子計算機の利用は反復計算法にとって、うってつけである。電子計算機内に作られた数式モデルの係数を順次修正することによって、最終的には、すべての係数が決定される。

まず、数式モデルの次数  $n$ 、及び、データ  $\{x_i, y_i\}$  が十分に与えられているものと仮定する。

反復計算法による数式モデルは次の (4-1) 式と定め、

$$f_n[k, j+1] = f_n[k, j] + \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}[j] \cdot \Delta a_k[j]}{2} T_k(x) & \text{for } k=0 \\ \operatorname{sgn}[j] \cdot \Delta a_k[j] \cdot T_k(x) & \text{for } k=1, 2, \dots, n \\ \operatorname{sgn}[j] \cdot \Delta a_k[j] \cdot U_{k-n}(x) & \text{for } k=n+1, n+2, \dots, n+n \end{cases}$$

但し、初期形、 $k=0, j=1$  に対し、

$$f_n[0, 1] = 0 \quad (4-1)$$

$T_k(x), U_{k-n}(x)$  はそれぞれ  $k$  次、 $k-n$  次の第一種、第二種チエビシェフ関数。

$f_n[k, j]: [ ]$  内の  $k$  は第  $k$  番目の係数  $a_k$  に関するもので、 $j$  は反復回数、添字  $n$  は数式モデルの構造次数を示す。

(4-1) 式を (4-2) と書き改め、 $a_k$  を陽に出せば

$$f_n[k, j] = f_n[k, 1] + \begin{cases} \frac{a_0[j]}{2} T_0(x) & \text{for } k=0 \\ a_k[j] T_k(x) & \text{for } k=1, 2, \dots, n \\ a_k[j] U_{k-n}(x) & \text{for } k=n+1, n+2, \dots, n+n \end{cases} \quad (4-2)$$

但し、

$$f_n[k, 1] = \lim_{j \rightarrow \infty} f_n[k-1, j] \text{ for } k=2, 3, \dots, 2n$$

このとき、反復式  $f_n[k, j]$  の構造に対する情報は係数  $a_k$  の  $j$  回目の反復値  $a_k[j]$  の構造に、帰着される。したがって、(4-1) 式の説明に替え、次の  $a_k[j]$ 、(4-3) 式を説明したい。

$$a_k[j+1] = a_k[j] + \operatorname{sgn}[j] \cdot \Delta a_k[j] \quad (4-3)$$

初期値  $a_k[1] = 0$  for  $k=0, 1, \dots, 2n$

ここで  $a_k[j]$  が決定されているものと仮定すれば、そ

の近似的評価は与えられているデータ  $\{x_i, y_i\}$  から次の  $J_n[k, j]$  として評価される。

$$J_n[k, j] = \frac{1}{2\pi} \int_1^{-1} (f_n[k, j] - y)^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (f_n[k, j] - y)^2 dx \quad (4-4)$$

(4-4) 式により、(4-3) 式における符号制御関数  $\operatorname{sgn}[j]$  の形を明らかにすれば

$$\operatorname{sgn}[j] = \begin{cases} \operatorname{sgn}[j-1] & \text{for } J_n[k, j] < J_n[k, j-1] \\ -\operatorname{sgn}[j-1] & \text{for } J_n[k, j] \geq J_n[k, j-1] \end{cases} \quad (4-5)$$

初期値  $j=1$  に対し、 $\operatorname{sgn}[1]=1$  とする。

また (4-3) 式における、修正量  $\Delta a_k[j]$  の構造は

$$\Delta a_k[j] = \Delta a_k[1] \cdot r^j \quad (4-6)$$

$\Delta a_k[1]$  は  $a_k$  に対する最大予想値を与えるものとし、

$$\Delta a_k[1] = \begin{cases} 2\sqrt{J_n[0, 1]} & \text{for } k=0 \\ \sqrt{2J_n[k, 1]} & \text{for } k=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-7)$$

$r$  については、収束性と符号制御関数の初期値に無関係に、解の存在領域への到着条件を考慮して、一意的に定まる定数である。<sup>4)</sup>

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4-8)$$

以上の形をもつ、反復計算式は最終的に  $f_n(x)$  に収束する。

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_n[2n, j] = f_n(x) \quad (4-9)$$

収束の速さは次の不等式で与えられる。

$$\frac{|a_k[j] - a_k|}{\Delta a_k[1]} \leq \frac{r^j}{1-r} \quad (4-10)$$

但し、 $\lim_{j \rightarrow \infty} a_k[j] = a_k$

証明  $a_k=0$  においても一般性を失わないから、この場合について証明しよう。先ず用意として符号制御関数  $\operatorname{sgn}[j]$ 、(4-5) 式において、 $a_k[j+1]$  は過去の  $a[j]$  と  $a[j-1]$  によって決定されることに注目すれば、

$$a_k[j-1] \cdot a_k[j] < 0$$

かつ  $a_k[j]$  と  $\operatorname{sgn}[j]$  が同符号であるとき、次の不等式が成立する。これは (4-3) 式から明らか。

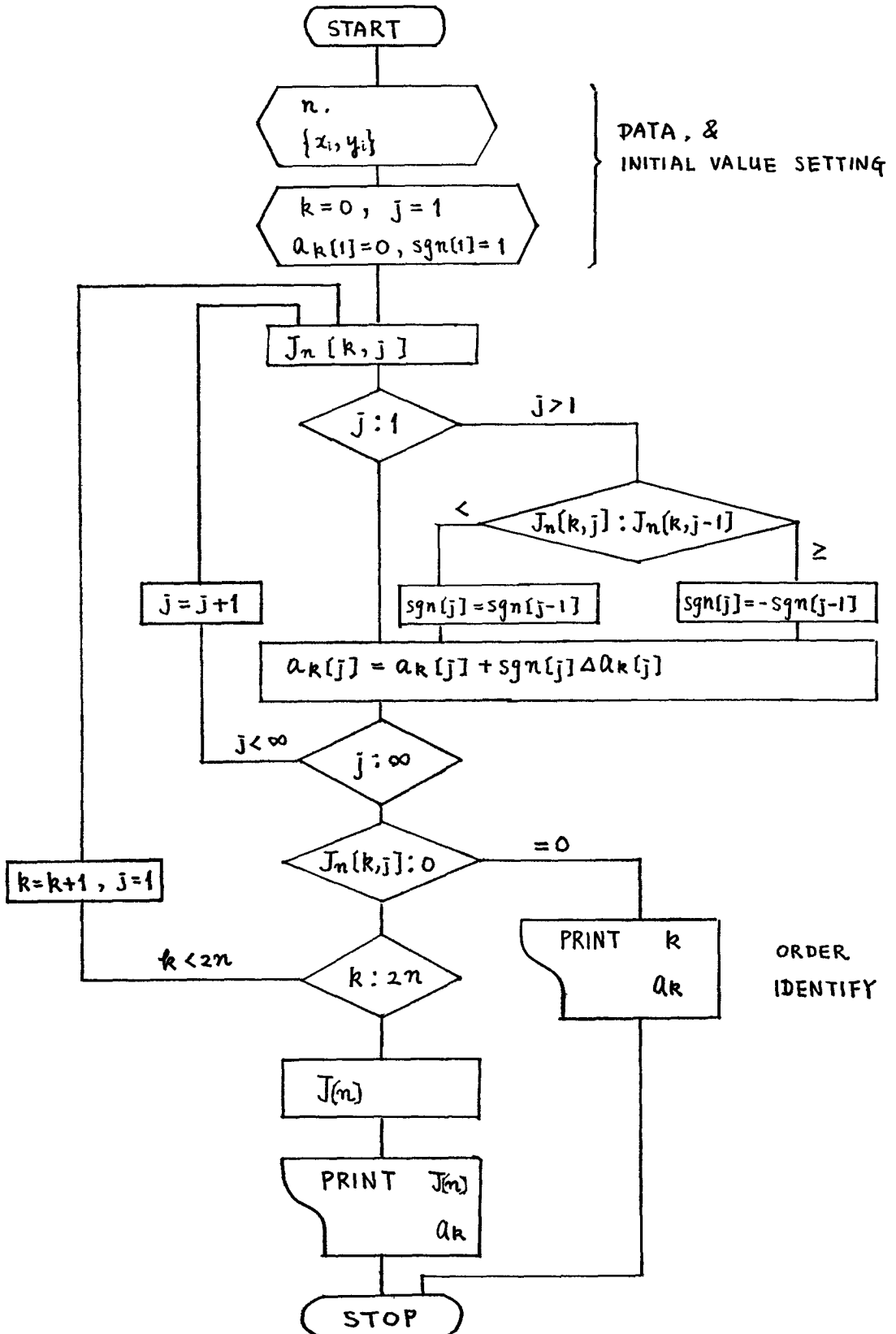
$$\frac{|a_k[j] - a_k|}{\Delta a_k[1]} \leq r^{j-1} \quad (4-11)$$

但し、 $a_k=0$

同様に、

$a_k[j-1] \cdot a_k[j] > 0$  であるか、或は次の同時条件  $a_k[j-1] \cdot a_k[j] < 0$  かつ  $a_k[j] \cdot \operatorname{sgn}[j] < 0$  であるならば  $a[j] \cdot \operatorname{sgn}[j] < 0$  となる性質に支配されている。

以上の符号制御関数の性質 (4-5) 式と不等式 (4-11) 式を使うことにより、(4-10) 式を数学的帰納法により証明できる。それには  $j=2$  とおき、次に  $j$  で成立を仮定、

Fig. 4 Flow chart of proposed method for  $a_k[j]$

$j+1$  における証明は  $j$  の成立仮定と不等式 (4-11) により、容易に証明される。

このような反復計算式 (4-3) は修正項  $\Delta a_k[j]$ , (4-6) の形を変えることによって、他の方面にも利用できる。(4-6) 式は収束の速さを上げるために与えられたものであり、一般的与え方としては

$$\Delta a_k[j] = c \cdot f[j] \quad (c: \text{定数})$$

例えば

$$f[j] = \frac{1}{j}$$

とおけば

$$\sum_{j=1}^{\infty} f[j] = \infty$$

となり、本質的に異なる性質を持つ。これは注目すべき点で、非定常系のモデルのように永久に修正を行なうとき利用できる性質であろう。

反復公式  $a_k[j]$ , (4-3) 式のフローチャートを Fig. 4 に示す。Fig. 4 における符号の解釈は数学のそれと意味上の相違点に注意、他の添字、その他は本文と一致している。

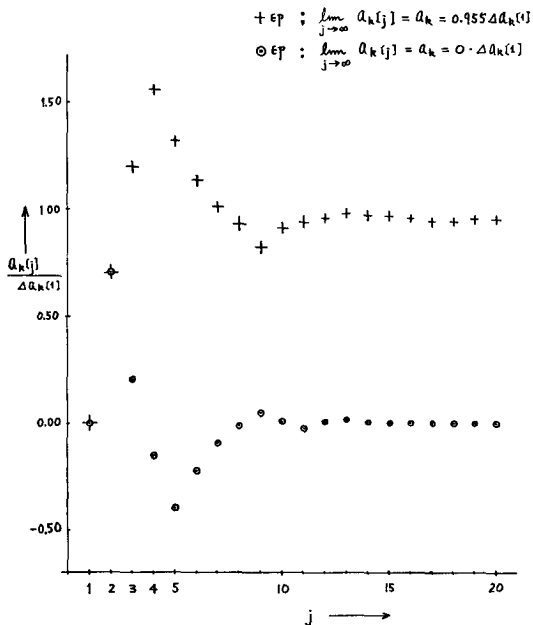


Fig. 5 収束の様子図

収束の様子を Fig. 5 に  $j=1$  から 20 までを示した。以上により、多項式の係数の算出を反復計算法によって求められる計算のアルゴリズムを紹介した。

## 5. あとがき

単位正弦波入力によって得られる二価ヒステリシス曲線の定式化をチェビシェフの直交多項式により行ない。係数の算定法に反復計算法を紹介した。またチェビシェフ関数は 1 対  $n$  のリサーチ図形であることを示し、二価ヒステリシス曲線を表現するのに、妥当といえた。

しかし、得られた関数形  $f_n(x)$ ,  $g_n(x)$  の利用に際しては  $x=w(t)$  までは拡張できるが、他の任意波形には性質上利用できなかったのは残念であった。

本文を終るにあたって、本研究に協力していただいた方々に、お礼を申し述べたいと思います。反復計算法に関しては本学から昭和 45, 46 年度海外研究留学資金の補助により、RPI で発展させたものであって、この計画<sup>3), 4)</sup>を認めて下さった柴田学長、RPI・システム主任、P. M. DeRusso、内容に関し、本学・電気工学主任・帆足教授からは二価性のヒントを、早大・理工・大照教授からは文献を、またこの種の研究の根深さの助言、本文の構成に関しての助言をいただいたことを幸せとして、これらの方々に厚くお礼申し上げ、本文を終る。

## 参考文献

- 1) L. J. Lewis : Harmonic Analysis for Nonlinear Characteristics, Trans. of The AIEE, vol. 74, 693/700 (1955).
- 2) R. Clay : Nonlinear Network and Systems, Wiley-Interscience, 126/129 (1970).
- 3) L. A. Gerhardt, T. Miura : Approximating Nonlinear Functions using an Adaptive Zero-Order Quantizer, RPI-Systems Report, July 15, 15/19 (1971).
- 4) L. A. Gerhardt, T. Miura : Algorithmic Techniques for Modelling Nonlinear Function, RPI-Systems Report, Feb. 15, (1971).
- 5) S. Ohteru, H. Kobayashi, T. Kato, K. Sudo : Eddy-Current Analysis in a Iron Sheet Considering Hysteresis Characteristics, IEEE Transaction on Magnetics, vol. MAG-7, No. 3, 457/460 (1971).
- 6) 大照 完 : 記憶とヒステリシス現象, 数理科学, 5 巻, 2 号, 33/47 (1967)